

**Perturbations thermiques du système balancier - spiral****Balancier de chronomètre de marine - Déformation centrifuge****Balancier bimétallique à serge coupée et deux masses compensatriques**

➔ Référence :D:\Résonateur (TE)\BS - Perturbations thermiques\IP\_TH - Bal chrono marine.mcd(R)

$$T_0 = 0.4 \text{ s} \quad f = 2.5 \text{ Hz} \quad \omega_0 := 2 \cdot \pi \cdot f \quad \Theta := 50$$

**Coefficients de dilatation et constantes élastiques**

$$\alpha_1 = 1.15 \times 10^{-5} \quad E_1 = 2.1 \times 10^{11} \text{ Pa} \quad \alpha_2 = 1.85 \times 10^{-5} \quad E_2 = 1 \times 10^{11} \text{ Pa} \quad \gamma_{\text{acier}} = -2.4 \times 10^{-4}$$

**Forme initiale de la serge**

$$x_0(\phi) := R_0 \cdot \cos(\phi) \quad y_0(\phi) := R_0 \cdot \sin(\phi)$$

**Perturbation de marche due à la force centrifuge agissant sur la serge coupée**

Vitesse angulaire moyenne du balancier (pour tester les ordres de grandeurs)  $\theta_0 := 270 \cdot \text{deg}$   $\Omega_m := \frac{2}{\pi} \cdot \omega_0 \cdot \theta_0$

**Perturbation due à la serge seule, sans les vis**

Moment quadratique de la serge en flexion plane  $I_{bs} := \frac{e_{bs}^3 \cdot h_{bs}}{12}$   $I_{bs} = 0.787 \text{ mm}^4$

Module apparent de la serge  $\mathcal{E} := \frac{4 \cdot E_1 \cdot E_2}{(\sqrt{E_1} + \sqrt{E_2})^2}$   $\mathcal{E} = 1.4 \times 10^{11} \text{ Pa}$

**Déformation de la serge seule sous l'effet de la force centrifuge**

$$k_{cs} := \frac{M_{bs} \cdot R_0^4 \cdot \Omega_m^2}{4 \cdot \pi \cdot \mathcal{E} \cdot I_{bs}}$$

$$u1_{cs}(\lambda, \phi) := k_{cs} \cdot [\phi \cdot (2 \cdot \sin(\phi) + \sin(\lambda)) + \sin(\phi) \cdot \sin(\lambda - \phi) - 2 \cdot \sin(\lambda) \cdot \sin(\phi) - 2 \cdot (1 - \cos(\phi))]$$

$$v1_{cs}(\lambda, \phi) := k_{cs} \cdot [-\phi \cdot (\cos(\lambda) + 2 \cdot \cos(\phi)) - \cos(\phi) \cdot \sin(\lambda - \phi) + 2 \cdot \sin(\phi) + \sin(\lambda) \cdot (2 \cdot \cos(\phi) - 1)]$$

$$u_{cs}(\lambda, \phi) := u1_{cs}(\lambda, \phi) \cdot (0 \leq \phi \leq \lambda) + u1_{cs}(\lambda - \pi, \phi) \cdot (0 \geq \phi \geq \lambda - \pi)$$

$$v_{cs}(\lambda, \phi) := v1_{cs}(\lambda, \phi) \cdot (0 \leq \phi \leq \lambda) + v1_{cs}(\lambda - \pi, \phi) \cdot (0 \geq \phi \geq \lambda - \pi)$$

$$u_{cs}(\lambda_0, \lambda_0) = -4.592 \times 10^{-4} \text{ mm} \quad v_{cs}(\lambda_0, \lambda_0) = 4.351 \times 10^{-3} \text{ mm}$$

$$u_{cs}(\lambda_0, \lambda_0 - \pi) = 5.343 \times 10^{-6} \text{ mm} \quad v_{cs}(\lambda_0, \lambda_0 - \pi) = -1.433 \times 10^{-6} \text{ mm}$$

$$x_{cs}(\phi) := x_0(\phi) + u_{cs}(\lambda_0, \phi) \quad y_{cs}(\phi) := y_0(\phi) + v_{cs}(\lambda_0, \phi) \quad r_{cs}(\phi) := \sqrt{x_{cs}(\phi)^2 + y_{cs}(\phi)^2}$$

**Variation relative du moment d'inertie du balancier sous l'effet de la force centrifuge sur la serge seule**

$$\Delta J_{bs} := \frac{M_{bs}}{\pi} \cdot \left( \int_{\lambda_0 - \pi}^{\lambda_0} r_{cs}(\phi)^2 d\phi \right) - M_{bs} \cdot R_0^2 \quad \Delta J_{bs} = 1.97408 \text{ mg} \cdot \text{cm}^2$$

$$a_{bs} := \frac{M_{bs}^2 \cdot R_0^5}{2 \cdot \pi^2 \cdot \mathcal{E} \cdot I_{bs} \cdot J_b} \cdot (3 \cdot \pi - 8 \cdot \sin(\lambda_0)) \quad \Delta J_{bs} := J_b \cdot a_{bs} \cdot \Omega_m^2 \quad \Delta J_{bs} = 1.97387 \text{ mg} \cdot \text{cm}^2$$

**Variation de marche correspondante**

$$\mu_{cs}(\theta_0) := -64800 \cdot \frac{M_{bs}^2 \cdot R_0^5}{\mathcal{E} \cdot I_{bs} \cdot J_b \cdot T_0^2} \cdot (3 \cdot \pi - 8 \cdot \sin(\lambda_0)) \cdot \theta_0^2 \quad \mu_{cs}(\theta_0) = -5.721$$

## Augmentation de la déformation de la serge due à la présence des masses

(Voir l'exemple d'une lame élastique en flexion plane dans la théorie avancée)

Position angulaire de la masse compensatrice  $\lambda_m = 110 \text{ deg}$ 

Déformation de la serge antérieure à une masse

$$k_{csm}(m) := \frac{m \cdot R_0^4 \cdot \Omega_m^2}{2 \cdot \mathcal{E} I_{bs}}$$

$$u1_{csm}(m, \lambda_m, \phi) := k_{csm}(m) \cdot (\phi \cdot \cos(\lambda_m) + \cos(\lambda_m) \cdot \sin(\phi) \cdot \cos(\phi) + \sin(\lambda_m) \cdot \sin(\phi)^2 - 2 \cdot \cos(\lambda_m) \cdot \sin(\phi))$$

$$v1_{csm}(m, \lambda_m, \phi) := k_{csm}(m) \cdot [\phi \cdot \sin(\lambda_m) - \sin(\lambda_m) \cdot \sin(\phi) \cdot \cos(\phi) - \cos(\lambda_m) + \cos(\lambda_m) \cdot \cos(\phi) \cdot (2 - \cos(\phi))]$$

$$u_{csm}(m, \lambda_m, \phi) := u1_{csm}(m, \lambda_m, \phi) \cdot \text{signe}(\lambda_m) \quad v_{csm}(m, \lambda_m, \phi) := v1_{csm}(m, \lambda_m, \phi) \cdot \text{signe}(\lambda_m)$$

$$\theta_{csm}(m, \lambda_m, \phi) := 2 \cdot \frac{k_{csm}(m)}{R_0} \cdot [\cos(\lambda_m) \cdot (1 - \cos(\phi)) - \sin(\lambda_m) \cdot \sin(\phi)] \cdot \text{signe}(\lambda_m)$$

$$u_{csm}(m_c, \lambda_m, \lambda_m) = 1.246 \times 10^{-3} \text{ mm} \quad v_{csm}(m_c, \lambda_m, \lambda_m) = 3.664 \times 10^{-3} \text{ mm}$$

$$\theta_{csm}(m_c, \lambda_m, \lambda_m) = -0.012 \text{ deg}$$

$$x_{csm}(m, \lambda_m, \phi) := x_0(\phi) + u_{csm}(m, \lambda_m, \phi) \quad y_{csm}(m, \lambda_m, \phi) := y_0(\phi) + v_{csm}(m, \lambda_m, \phi)$$

$$r_{csm}(m, \lambda_m, \phi) := \sqrt{x_{csm}(m, \lambda_m, \phi)^2 + y_{csm}(m, \lambda_m, \phi)^2} \quad r_{csm}(m_c, \lambda_m, \lambda_m) - R_0 = 3.017 \times 10^{-3} \text{ mm}$$

Déplacement de la serge au-delà d'une masse

$$\mathbf{O}(m, \lambda_m) := \begin{pmatrix} R_0 \cdot \cos(\lambda_m) \\ R_0 \cdot \sin(\lambda_m) \end{pmatrix} \quad \mathbf{R}(\theta) := \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \mathbf{T}(m, \lambda_m) := \begin{pmatrix} u_{csm}(m, \lambda_m, \lambda_m) \\ v_{csm}(m, \lambda_m, \lambda_m) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X}_d(m, \lambda_m, \phi) := \mathbf{R}(\theta_{csm}(m, \lambda_m, \lambda_m)) \cdot \left[ \begin{pmatrix} R_0 \cdot \cos(\phi) \\ R_0 \cdot \sin(\phi) \end{pmatrix} - \mathbf{O}(m, \lambda_m) \right] + \mathbf{O}(m, \lambda_m) + \mathbf{T}(m, \lambda_m)$$

$$\Delta x_{dm}(m, \lambda_m, \phi) := \mathbf{X}_d(m, \lambda_m, \phi)_0 - R_0 \cdot \cos(\phi) \quad \Delta y_{dm}(m, \lambda_m, \phi) := \mathbf{X}_d(m, \lambda_m, \phi)_1 - R_0 \cdot \sin(\phi)$$

Déformation de la serge due à la masse compensatrice sur une demi-serge

$$u1_{csv}(m, \lambda_m, \phi) := [u_{csm}(m, \lambda_m, \phi) \cdot (0 \leq \phi \leq \lambda_m) + \Delta x_{dm}(m, \lambda_m, \phi) \cdot (\phi > \lambda_m)] \cdot (\lambda_m > 0)$$

$$v1_{csv}(m, \lambda_m, \phi) := [v_{csm}(m, \lambda_m, \phi) \cdot (0 \leq \phi \leq \lambda_m) + \Delta y_{dm}(m, \lambda_m, \phi) \cdot (\phi > \lambda_m)] \cdot (\lambda_m > 0)$$

$$u_{csv}(\phi) := u1_{csv}(m_c, \lambda_m, \phi) \quad v_{csv}(\phi) := v1_{csv}(m_c, \lambda_m, \phi)$$

$$x_{csv}(\phi) := x_0(\phi) + u_{csv}(\phi) \quad y_{csv}(\phi) := y_0(\phi) + v_{csv}(\phi) \quad r_{csv}(\phi) := \sqrt{x_{csv}(\phi)^2 + y_{csv}(\phi)^2}$$

Variation relative du moment d'inertie du balancier sous l'effet de la force centrifuge agissant sur les masses

$$\Delta J_{bsm} := \frac{M_{bs}}{\pi} \cdot \left( \int_{\lambda_0 - \pi}^{\lambda_0} r_{csv}(\phi)^2 d\phi \right) - M_{bs} \cdot R_0^2 \quad \Delta J_{bsm} = 2.5817 \text{ mg} \cdot \text{cm}^2$$

Variation de marche correspondante

$$a_{bsm} := \frac{\Delta J_{bsm}}{J_b \cdot \Omega_m^2} \quad \mu_{csm}(\theta_0) := -32400 \cdot a_{bsm} \cdot \omega_0^2 \cdot \theta_0^2 \quad \mu_{csm}(\theta_0) = -7.483$$

**Perturbation due aux masses compensatrices seules (serge élastique de masse nulle)**

$$u_{cm}(m, \lambda_m) := k_{csm}(m) \cdot [\lambda_m \cdot \cos(\lambda_m) + \sin(\lambda_m) \cdot (1 - 2 \cdot \cos(\lambda_m))] \cdot \text{signe}(\lambda_m)$$

$$v_{cm}(m, \lambda_m) := k_{csm}(m) \cdot [\lambda_m \cdot \sin(\lambda_m) + 2 \cdot \cos(\lambda_m) \cdot (\cos(\lambda_m) - 1)] \cdot \text{signe}(\lambda_m)$$

$$u_{cm}(m_c, \lambda_m) = 1.246 \times 10^{-3} \text{ mm} \quad v_{cm}(m_c, \lambda_m) = 3.664 \times 10^{-3} \text{ mm}$$

$$x_{cm}(m, \lambda_m) := x_0(\lambda_m) + u_{cm}(m, \lambda_m) \quad y_{cm}(m, \lambda_m) := y_0(\lambda_m) + v_{cm}(m, \lambda_m)$$

$$r_{cm}(m, \lambda_m) := \sqrt{x_{cm}(m, \lambda_m)^2 + y_{cm}(m, \lambda_m)^2} \quad r_{cm}(m_c, \lambda_m) - R_0 = 3.017 \times 10^{-3} \text{ mm}$$

$$\Delta J_m(m, \lambda_m) := 2 \cdot m \cdot (r_{cm}(m, \lambda_m)^2) - 2 \cdot m \cdot R_0^2 \quad \Delta J_m(m_c, \lambda_m) = 3.443 \text{ mg} \cdot \text{cm}^2$$

$$\Delta J_m(m, \lambda_m) := 4 \cdot m \cdot R_0 \cdot k_{csm}(m) \cdot (|\lambda_m| - \sin(|\lambda_m|) \cdot \cos(|\lambda_m|)) \quad \Delta J_m(m_c, \lambda_m) = 3.443 \text{ mg} \cdot \text{cm}^2$$

$$a_m(m, \lambda_m) := \frac{2 \cdot m^2 \cdot R_0^5}{\mathcal{E} \cdot I_{bs} \cdot J_b} \cdot (|\lambda_m| - \sin(|\lambda_m|) \cdot \cos(|\lambda_m|)) \quad a_m(m_c, \lambda_m) \cdot \Omega_m^2 = 1.248 \times 10^{-4}$$

$$\mu_{cm}(\theta_0) := -32400 \cdot a_m(m_c, \lambda_m) \cdot \omega_0^2 \cdot \theta_0^2 \quad \mu_{cm}(\theta_0) = -9.979$$

**Perturbation totale de la serge avec ses masses compensatrices**

$$\mu_c(\theta_0) := \mu_{cs}(\theta_0) + \mu_{csm}(\theta_0) + \mu_{cm}(\theta_0) \quad \mu_c(\theta_0) = -23.183 \quad \frac{\mu_{csm}(\theta_0) + \mu_{cm}(\theta_0)}{\mu_{cs}(\theta_0)} = 3.052$$

**Graphes des déformations**

➡ Référence : D:\Résonateur (TE)\Data\Définition Atan.mcd(R)

**Forme initiale de la serge et du bras**

$$n := 200 \quad i := 0..n \quad \Delta\psi := 178 \cdot \text{deg} \quad j := 2..n-2 \quad R_{b_j} := -R_0 + \frac{2 \cdot R_0}{n} \cdot j$$

$$\phi_i := \lambda_0 - \pi + \frac{\Delta\psi}{n} \cdot i \quad x_0(\phi) := R_0 \cdot \cos(\phi) \quad y_0(\phi) := R_0 \cdot \sin(\phi) \quad r_0(\phi) := \sqrt{x_0(\phi)^2 + y_0(\phi)^2} \cdot \text{mm}^{-1}$$

**Déformations thermiques de la serge et du bras**

$$\Theta := 50 \quad \text{Facteur d'agrandissement graphique} \quad Ag := 10 \quad \Theta := Ag \cdot \Theta$$

$$x_{th}(\Theta, \phi) := a(\Theta) + R(\Theta) \cdot \cos(\phi) \quad y_{th}(\Theta, \phi) := R(\Theta) \cdot \sin(\phi) \quad r_{th_i} := \sqrt{x_{th}(\Theta, \phi_i)^2 + y_{th}(\Theta, \phi_i)^2} \cdot \text{mm}^{-1}$$

$$\beta_{th_i} := \text{Atan}(x_{th}(\Theta, \phi_i), y_{th}(\Theta, \phi_i)) \quad \beta_{th_0} = 336.757 \text{ deg} \quad \beta_{th_n} = 150.83 \text{ deg}$$

**Déformation centrifuge de la serge sans masses****Facteur d'agrandissement graphique**

$$Ag := 100$$

$$x_{cs_i} := x_0(\phi_i) + Ag \cdot u_{cs}(\lambda_0, \phi_i) \quad y_{cs_i} := y_0(\phi_i) + Ag \cdot v_{cs}(\lambda_0, \phi_i) \quad r_{cs_i} := \sqrt{(x_{cs_i})^2 + (y_{cs_i})^2} \cdot \text{mm}^{-1}$$

$$\beta_{cs_i} := \text{Atan}(x_{cs_i}, y_{cs_i}) \quad \beta_{cs_0} = 335 \text{ deg} \quad \beta_{cs_n} = 151.76 \text{ deg}$$

**Déformation centrifuge de la serge due aux masses**

$$x_{csv_i} := x_0(\phi_i) + Ag \cdot u_{csv}(\phi_i) \quad y_{csv_i} := y_0(\phi_i) + Ag \cdot v_{csv}(\phi_i) \quad r_{csv_i} := \sqrt{(x_{csv_i})^2 + (y_{csv_i})^2} \cdot \text{mm}^{-1}$$

$$\beta_{csv_i} := \text{Atan}(x_{csv_i}, y_{csv_i}) \quad \beta_{csv_0} = 335 \text{ deg} \quad \beta_{csv_n} = 151.386 \text{ deg}$$

## Déformation centrifuge totale de la serge

$$x_{ct_i} := x_{cs_i} + x_{csv_i} - x_0(\phi_i)$$

$$y_{ct_i} := y_{cs_i} + y_{csv_i} - y_0(\phi_i)$$

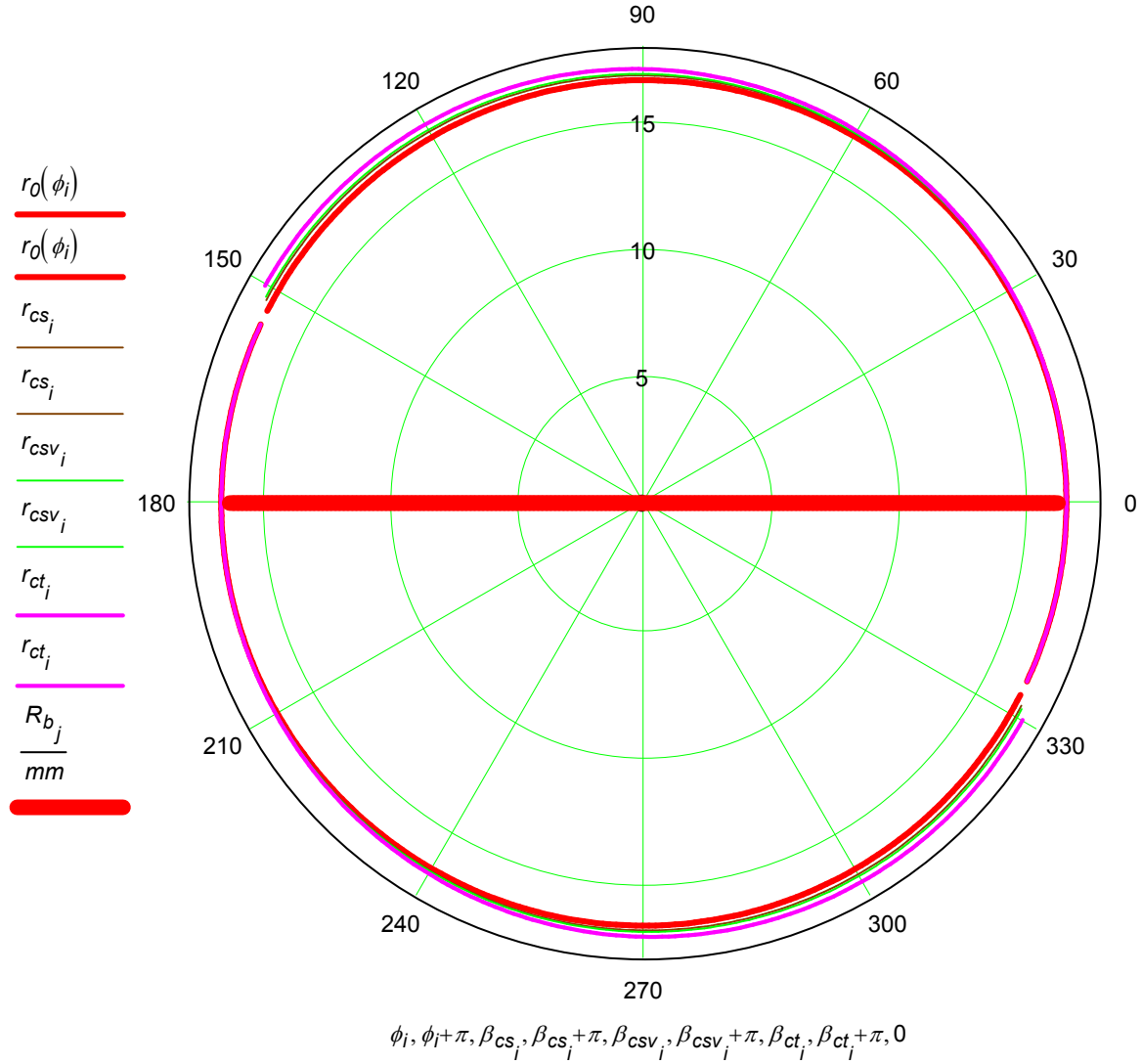
$$r_{ct_i} := \sqrt{(x_{ct_i})^2 + (y_{ct_i})^2} \cdot mm^{-1}$$

$$\beta_{ct_i} := \text{Atan}(x_{ct_i}, y_{ct_i})$$

$$\beta_{ct_0} = 335 \text{ deg}$$

$$\beta_{ct_n} = 150.19 \text{ deg}$$

## Comparaison des déformations centrifuges



## Comparaison des déformations centrifuge et thermique

Facteur d'agrandissement graphique 100 fois plus grand pour la déformation centrifuge !!

